第16講　微分でやっておきたいこと

16

［A］　以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，
$F(x)=e^x f(x)$ とおく．

(1)　定数関数でない関数 $f(x)$ で条件(A)「すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である」を満たすものの例をあげよ．

(2)　関数 $f(x)$ が条件(B)「すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である」を満たすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)を満たすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ．

(4)　関数 $f(x)$ が(1)，(2)の条件(A)，(B)をともに満たすとする．

1．$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ．

2．ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ であることを示せ．

［B］　$x>0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$$

で定める．対数は自然対数である．

(1)　導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．

(2)　$f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ．

(3)　正の実数 p，q について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　微分でやっておきたいこと

16　m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x)$，$v(x)$，$f(x)$，$g(x)$ を

$$u(x)=\int_0^x S(t)dt+m,\ v(x)=\int_0^x tS(t)dt+m,\ f(x)=\frac{v(x)}{u(x)},\ g(x)=v(x)-xu(x)$$

とおく．

(1)　$g(0)>0$，$g(1)<0$ および $x>0$ において $g'(x)<0$ を示せ．

(2)　$f(x)=x$ を満たす x の値がただ1つ存在することを示せ．

(3)　$f(x)=x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　微分でやっておきたいこと

16

［A］ 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，
$F(x)=e^x f(x)$ とおく．

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で条件(A)「すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である」を満たすものの例をあげよ．

(2) 関数 $f(x)$ が条件(B)「すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である」を満たすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)を満たすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ．

(4) 関数 $f(x)$ が(1)，(2)の条件(A)，(B)をともに満たすとする．

1．$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ．

2．ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ であることを示せ．

［B］ $x>0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$$

で定める．対数は自然対数である．

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．

(2) $f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ．

(3) 正の実数 p，q について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．

【答】 ［A］ (1) $f(x)=\sin 2\pi x$　(2) 略　(3) $F(x+n)=e^n F(x)$　(4) 略

［B］ (1) 略　(2) $x=1$　(3) 略

【解説】

［A］ (1) $\sin kx$ の基本周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ が1となるように $k=2\pi$ とすると，

$$\boldsymbol{f(x)=\sin 2\pi x}$$

(2) $F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}\leqq 0$

よって $F(x)$ は非増加関数であるので

$$a<b \text{ のとき } F(a)\geqq F(b)$$

(3)
$$\begin{aligned}F(x+n)&=e^{x+n}f(x+n)\\&=e^n\cdot e^x f(x)\\&=\boldsymbol{e^n F(x)}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　$f(c) \geqq 0$ とすると，(3)より $n \geqq 1$ の場合に

$$F(n+c) \leqq F(c) \iff e^{n+c}f(c) \leqq e^{c}f(c)$$
$$\iff e^{c}(e^{n}-1)f(c) \leqq 0$$

ここで $e^{n}-1>0$ より $f(c) \leqq 0$　よって

$$f(c)=0$$

またある c について $f(c)=0$ のとき任意の x に対し

$$c+n \leqq x < c+n+1$$

となる n が存在するが，(3)の結果の x に $x-n$ を代入することで，

$$F(x)=e^{n}F(x-n) \qquad \therefore \quad F(x-n)=e^{-n}F(x)$$

となり，また $F(x+n)=e^{n}F(x)$ は $n=0$ のときにも成り立つので，$F(x+n)=e^{n}F(x)$ は任意の整数 n の場合に成り立つ．よって

$$F(c+n) \geqq F(x) \geqq F(c+n+1)$$
$$\iff e^{c+n}f(c) \geqq e^{x}f(x) \geqq e^{c+n+1}f(c)$$
$$\therefore \quad e^{x}f(x)=0$$

ゆえに

$$f(x)=0$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1) 題意の $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=x\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2}{x^2+1}\cdot x+(x-1)-2x\log x-x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$=x\log\frac{x^2+1}{2}-2x\log x+x-1$$

$$f''(x)=\log\frac{x^2+1}{2}+x\cdot\frac{2}{x^2+1}\cdot x-2\log x-2x\cdot\frac{1}{x}+1$$

$$=\log\frac{x^2+1}{2}-2\log x-\frac{2}{x^2+1}+1$$

$$f'''(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)^2}$$

よって $f''(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		↘	0	↗

となり $f''(x)\geqq 0$ より $f'(x)$ は単調増加である.

(2) $f'(1)=0$ より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

となるので $f(x)\geqq 0$　等号成立は $\boldsymbol{x=1}$ のとき.

(3) (2)より正の実数 p, q に対して $q^2f\left(\frac{p}{q}\right)\geqq 0$ が成り立つ.

$$q^2f\left(\frac{p}{q}\right)\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2q^2}+\frac{1}{2}(p-q)^2-p^2\log\frac{p}{q}\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^2-\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2-p^2\log\frac{p}{q}\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

(等号は $\frac{p}{q}=1$ つまり $p=q$ のとき成立)

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　微分でやっておきたいこと

16　m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x)$，$v(x)$，$f(x)$，$g(x)$ を

$$u(x)=\int_0^x S(t)dt+m,\ v(x)=\int_0^x tS(t)dt+m,\ f(x)=\frac{v(x)}{u(x)},\ g(x)=v(x)-xu(x)$$

とおく．

(1)　$g(0)>0$，$g(1)<0$ および $x>0$ において $g'(x)<0$ を示せ．

(2)　$f(x)=x$ を満たす x の値がただ1つ存在することを示せ．

(3)　$f(x)=x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) a

【解説】

(1)

$$\begin{cases} u(0)=m>0, & v(0)=m>0, \\ u'(x)=S(x)>0, & v'(x)=xS(x)\geqq 0 \end{cases}$$

等より

$$g(0)=v(0)=m>0,$$

$$g(1)=v(1)-u(1)=\int_0^1 (t-1)S(t)dt<0$$

$$(0<t<1 \text{ のとき } t-1<0 \text{ より})$$

$x>0$ のとき

$$g'(x)=v'(x)-u(x)-xu'(x)$$

$$=-u(x)<0$$

$$(u(0)>0,\ u'(x)>0 \text{ より } u(x)>0)$$

(2)

$$f(x)=x \iff \frac{v(x)}{u(x)}=x$$

$$\iff v(x)=xu(x)$$

$$\iff g(x)=0$$

(1)より $g(x)=0$ の解は $0<x<1$ にただ1つだけ存在する．よって $f(x)=x$ の解についても同様である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$f(x)=x$ の解が a より

$$f(a)=a \iff v(a)=au(a) \iff g(a)=0$$

が成り立つ．このとき

$$f'(x)=\frac{1}{\{u(x)\}^2}\{v'(x)u(x)-v(x)u'(x)\}$$
$$=\frac{S(x)}{\{u(x)\}^2}\{-g(x)\}$$

よって $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

となるので最小値は

$$f(a)=\boldsymbol{a}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。